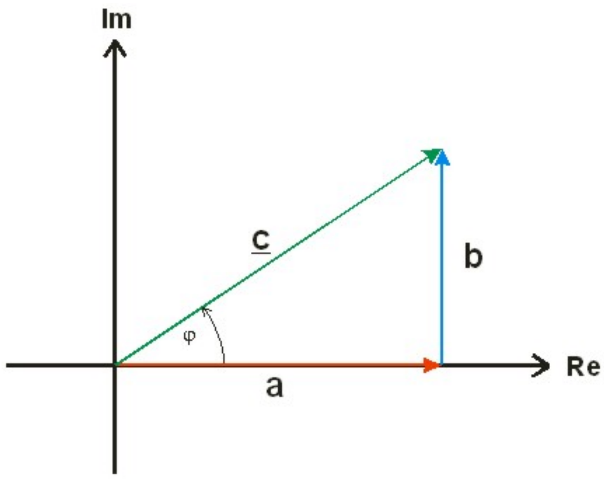
Komplexe Zahlen und deren Darstellung:



$$\boxed{\underline{c} = a + j \bullet b}$$

$\underline{c}$ = c komplex
a = Realanteil von $\underline{c}$ (auch Re {$\underline{c}$})
b = Imaginäranteil von $\underline{c}$ (auch Im {$\underline{c}$})

Darstellungsformen:

1. Normalform (algebraische Schreibweise):

$$\boxed{\underline{c} = a + j \bullet b}$$

2. Polarform (trigonometrische Schreibweise):

$$\boxed{|\underline{c}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

|c| = Betrag (Länge) von c komplex

$$\boxed{\underline{c} = |\underline{c}| \bullet (\cos\varphi + j \bullet \sin\varphi)} \qquad \boxed{a = |\underline{c}| \bullet \cos\varphi} \qquad \boxed{b = |\underline{c}| \bullet \sin\varphi}$$

3. Eulersche Form (Exponentialschreibweise):

Nach Euler gilt: $\boxed{e^{j \bullet \varphi} = \cos\varphi + j \bullet \sin\varphi}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{c} = |\underline{c}| \bullet e^{j \bullet \varphi}}$$

4. Versorform:

$\boxed{\underline{c} = |\underline{c}| \angle \varphi}$ ($\angle\varphi$ sprich: versor phi)

Umrechnung komplexer Zahlen mit dem Taschenrechner:

Taschenrechner Sharp EL546R:

Mit 2ndF + Math + 1 den Taschenrechner in den Modus für komplexe Zahlen bringen.

Mit Math + 1 wird die Darstellung in der Versorform eingestellt. (r0-Anzeige im Display)
Mit Math + 2 wird die Darstellung in der Normalform eingestellt. (xy-Anzeige im Display)

Mit 2ndF + Exp wird zwischen der Anzeige des Realanteils und des Imaginäranteils von $\underline{c}$ bzw. zwischen der Anzeige des Betrages und $\angle\varphi$ von $\underline{c}$ hin und her gewechselt.
Mit $a^{b/c}$ wird das j-Zeichen dargestellt. Mit D°M'S wird das Versor-Zeichen dargestellt.

Umrechnung Normalform → Versorform:
- Taschenrechner auf Versorform einstellen (Math + 1)
- Komplexe Zahl in der Normalform eingeben und mit = betätigen (z.B. 3 + $a^{b/c}$ 2 =)
- Es wird der Betrag von $\underline{c}$ angezeigt
- Für $\angle\varphi$ 2ndF + Exp betätigen

Umrechnung Versorform → Normalform:
- Taschenrechner auf Normalform einstellen (Math + 1)
- Komplexe Zahl in der Versorform eingeben und mit = betätigen (z.B. 3 D°M'S 2 2 =)
- Es wird der Realanteil von $\underline{c}$ angezeigt
- Für den Imaginäranteil 2ndF + Exp betätigen

Taschenrechner Casio fx 991 WA:

Mit Mode + 2 den Taschenrechner in den Modus für komplexe Zahlen bringen.
!!! Die Darstellung erfolgt immer in der Normalform !!! Keine Umstellung auf die Versorform im komplexen Modus möglich.

Mit ENG wird das j-Zeichen dargestellt.

Betrag einer komplexen Zahl (z.B. 3 + j4) berechnen:
Shift) (3 + 4 ENG) = eingeben.

Winkel einer komplexen Zahl (z.B. 3 + j4) berechnen:
Shift ((3 + 4 ENG) = eingeben.

Umrechnungen zwischen der Versorform und der Normalform müssen über den Umweg der Berechnung von Polarkoordinaten (Versorform) und der kartesischen Koordinaten (Normalform) getätigt werden:

Mit Mode + 1 den Taschenrechner in den normalen Modus schalten.

Umrechnung kartesich (Normalform) → polar (Versorform) (z.B. 3 + j4):
- Pol(3 , 4) = eingeben und es wird der Betrag = Länge angezeigt.
- Der Winkel wird mit RCL tan angezeigt.
- Mit RCL cos wird der Betrag angezeigt.

Umrechnung polar (Versorform) → kartesich (Normalform) (z.B. $3\angle 65°$):
- Shift Pol(3 , 65) = eingeben und es wird der Realanteil = x-Wert angezeigt.
- Der Imaginäranteil = y-Wert wird mit RCL tan angezeigt.
- Mit RCL cos wird der Realanteil angezeigt.

Gleichheit von komplexen Zahlen:

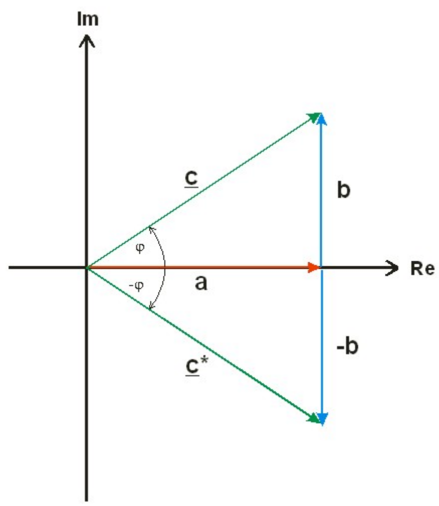
Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn ihre Realanteile und ihre Imaginäranteile gleich sind.

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{c} &= a + j \bullet b \\ \underline{d} &= e + j \bullet f\end{aligned}} \Rightarrow \text{c und d sind gleich, wenn a=e und b=f ist.}$$

Konjugiert komplexe Zahlen:

Die konjugiert komplexe Zahl wird gebildet, indem man die komplexe Zahl an der reellen Achse spiegelt.

$\underline{c}$ = komplexe Zahl
$\underline{c}^*$ = konjugiert komplexe Zahl



In der Normalform:

$$\boxed{\underline{c} = a + j \bullet b} \Rightarrow \boxed{\underline{c}^* = a - j \bullet b}$$

In der trigonometrischen Form:

$$\boxed{\underline{c} = |\underline{c}| \bullet (\cos\varphi + j \bullet \sin\varphi)} \Rightarrow \boxed{\underline{c}^* = |\underline{c}| \bullet (\cos\varphi - j \bullet \sin\varphi)}$$

In der Eulerschen Form:

$$\boxed{\underline{c} = |\underline{c}| \bullet e^{j \bullet \varphi}} \Rightarrow \boxed{\underline{c}^* = |\underline{c}| \bullet e^{-j \bullet \varphi}}$$

In der Versorform:

$$\boxed{\underline{c} = |\underline{c}| \angle \varphi} \Rightarrow \boxed{\underline{c}^* = |\underline{c}| \angle -\varphi}$$

Addition oder Subtraktion von komplexen Zahlen:

Zur **Addition oder Subtraktion** von komplexen Zahlen müssen diese **in der Normalform** vorliegen !!!

Regel:

Zwei komplexe Zahlen werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre Realanteile und ihre Imaginäranteile addiert bzw. subtrahiert.

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{z}_1 &= a + j \bullet b \\ \underline{z}_2 &= c + j \bullet d\end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\underline{z}_1 + \underline{z}_2 &= (a + c) + j \bullet (b + d) \\ \underline{z}_1 - \underline{z}_2 &= (a - c) + j \bullet (b - d)\end{aligned}}$$

Multiplikation oder Division von komplexen Zahlen:

Zur **Multiplikation oder Division** von komplexen Zahlen müssen dies **in der Exponentialform (Eulerform) oder in der Versorform** vorliegen !!!

Regel:
- Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Realanteile multipliziert und ihre Imaginäranteile addiert.
- Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Realanteile dividiert und ihre Imaginäranteile subtrahiert.

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{z}_1 = |\underline{z}_1| \bullet e^{j\bullet\varphi 1} \\ \underline{z}_2 = |\underline{z}_2| \bullet e^{j\bullet\varphi 2} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \underline{z}_1 \bullet \underline{z}_2 = |\underline{z}_1| \bullet |\underline{z}_2| \bullet e^{j\bullet(\varphi 1+\varphi 2)} \\ \dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \dfrac{|\underline{z}_1| \bullet e^{j\bullet\varphi 1}}{|\underline{z}_2| \bullet e^{j\bullet\varphi 2}} = \dfrac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} \bullet e^{j\bullet(\varphi 1-\varphi 2)} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{z}_1 = |\underline{z}_1| \angle\varphi_1 \\ \underline{z}_2 = |\underline{z}_2| \angle\varphi_2 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \underline{z}_1 \bullet \underline{z}_2 = |\underline{z}_1| \bullet |\underline{z}_2| \angle(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \dfrac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} \angle(\varphi_1 - \varphi_2) \end{array}}$$

Definition der Zahl j:

$\boxed{j = \sqrt{-1}}$ $\boxed{j^2 = -1}$ $\boxed{j^3 = -j}$ $\boxed{j^4 = 1}$ $\boxed{j^5 = j}$

Multiplikation einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl:

Die Multiplikation einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl ergibt das Quadrat des Betrages der komplexen Zahl.

$\boxed{\underline{z}_1 \bullet \underline{z}_1{}^* = |\underline{z}_1|^2}$ Es entsteht ein rein reelles Ergebnis !!

Inversion einer komplexen Zahl:

Inversion über die Euler- oder Versorform:

$$\boxed{\underline{z}_1 = |\underline{z}_1| \bullet e^{j\bullet\varphi}} \Rightarrow \frac{1}{\underline{z}_1} = \frac{1}{|\underline{z}_1| \bullet e^{j\bullet\varphi}} = \frac{1}{|\underline{z}_1|} \bullet e^{-j\bullet\varphi} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\underline{z}_1} = \frac{1}{|\underline{z}_1|} \bullet e^{-j\bullet\varphi}}$$

Inversion über Normalform und konjugiert komplexer Erweiterung:

$$\boxed{\underline{z} = a + j \bullet b} \Rightarrow \frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{(a + j \bullet b)} \bullet \frac{(a - j \bullet b)}{(a - j \bullet b)} = \frac{(a - j \bullet b)}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \bullet \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\underline{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \bullet \frac{b}{a^2 + b^2}}$$

Vereinbarungen für die Elektrotechnik:

$\underline{U}$ = komplexe Spannung
$\underline{U}^*$ = konjugiert komplexe Spannung
$|\underline{U}|$ = U = Betrag der Spannung (Effektivwert)
φ_U = Nullphasenwinkel der Spannung

$\underline{I}$ = komplexer Strom
$\underline{I}^*$ = konjugiert komplexer Strom
$|\underline{I}|$ = I = Betrag des Stromes (Effektivwert)
φ_I = Nullphasenwinkel des Stromes

Grundzweipole in komplexer Darstellung:

	Scheinwiderstand $\underline{Z}$ (Impendanz)			Scheinleitwert $\underline{Y}$		
	Normal	Exponential	Versor	Normal	Exponential	Versor
Widerst.	R	$R \bullet e^{j0°}$	$R\angle 0°$	G	$G \bullet e^{j0°}$	$G\angle 0°$
Spule	$j\omega L$	$\omega L \bullet e^{j90°}$	$\omega L\angle 90°$	$\frac{1}{j\omega L} = -j \bullet \frac{1}{\omega L}$	$\frac{1}{\omega L} \bullet e^{-j90°}$	$\frac{1}{\omega L}\angle -90°$
	jX_L	$X_L \bullet e^{j90°}$	$X_L\angle 90°$	$-jB_L$	$B_L \bullet e^{-j90°}$	$B_L\angle -90°$
Kondens.	$\frac{1}{j\omega C} = -j \bullet \frac{1}{\omega C}$	$\frac{1}{\omega C} \bullet e^{-j90°}$	$\frac{1}{\omega C}\angle -90°$	$j\omega C$	$\omega C \bullet e^{j90°}$	$\omega C\angle 90°$
	$-jX_C$	$X_C \bullet e^{-j90°}$	$X_C\angle -90°$	jB_C	$B_C \bullet e^{j90°}$	$B_C\angle 90°$

$$\boxed{\omega = 2 \bullet \pi \bullet f}$$

R = Widerstand in Ω
G = Leitwert in S
L = Induktivität in H
X_L = induktiver Blindwiderstand in Ω
B_L = induktiver Blindleitwert in Ω
C = Kapazität in F
X_C = kapazitiver Blindwiderstand in Ω
B_C = kapazitiver Blindleitwert in Ω
ω = Kreisfrequenz in $\frac{1}{s}$
f = Frequenz in Hz

Komplexe Widerstände:

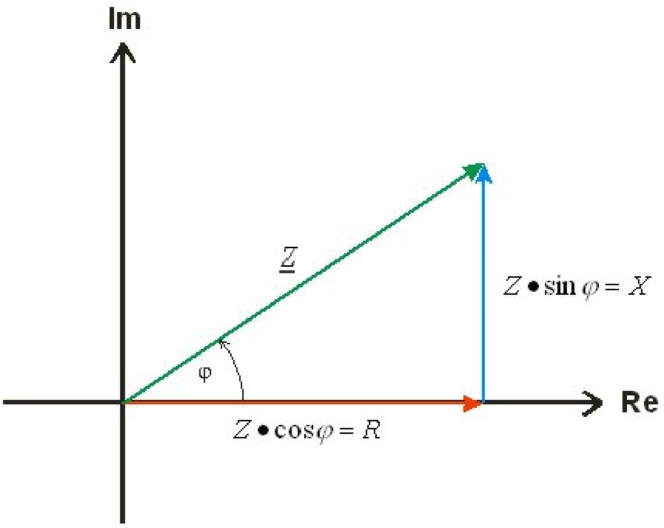
$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$ $\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}}$ $\boxed{\underline{U} = \underline{I} \bullet \underline{Z}}$

$\boxed{\underline{Z} = \frac{U \bullet e^{j \bullet \varphi_U}}{I \bullet e^{j \bullet \varphi_I}}}$ mit $\boxed{\varphi = \varphi_U - \varphi_I}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{Z} = \frac{U}{I} \bullet e^{j \bullet \varphi}} \Rightarrow \boxed{\underline{Z} = Z \bullet e^{j \bullet \varphi}}$

$\boxed{\underline{Z} = Z \angle \varphi} \Rightarrow \underline{Z} = Z \bullet (\cos\varphi + j \bullet \sin\varphi)$

$\Rightarrow \boxed{\underline{Z} = R + jX}$



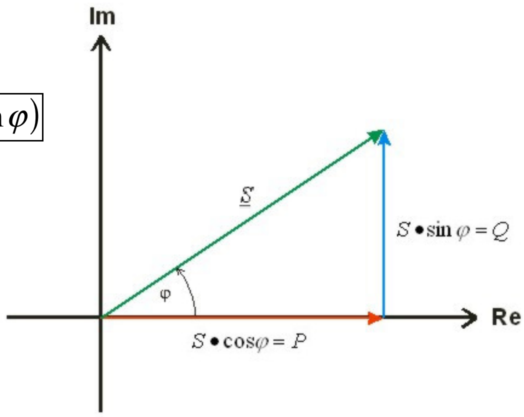
$\underline{Z}$ = komplexer Widerstand in Ω
$\underline{U}$ = komplexe Spannung in V
$\underline{I}$ = komplexer Strom in A
φ = Winkel in °
φ_U = Spannungs-Nullphasenwinkel in °
φ_I = Strom-Nullphasenwinkel in °
U = Spannung in V (Betrag von $\underline{U}$)
I = Strom in A (Betrag von $\underline{I}$)
R = Wirkwiderstand in Ω
X = Scheinwiderstand in Ω

Komplexe Leistung:

$\boxed{\underline{S} = P + jQ}$ $\boxed{\underline{S} = S \bullet e^{j\varphi}}$ $\boxed{\underline{S} = S \bullet (\cos\varphi + j \bullet \sin\varphi)}$

$\boxed{\underline{S} = \underline{U} \bullet \underline{I}^*}$ $\boxed{\cos\varphi = \frac{P}{S}}$ $\boxed{\sin\varphi = \frac{Q}{S}}$

$\boxed{\underline{S} = \underline{Z} \bullet I^2}$ $\boxed{\underline{S} = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}}$



Die komplexe Leistung errechnet sich aus dem Produkt der komplexen Spannung und des konjugiert komplexen Stromes.

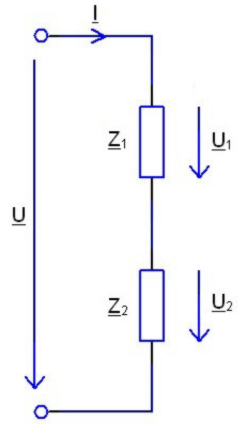
$\underline{S}$ = komplexe Leistung
P = Wirkleistung in W
Q = Blindleistung in var
cosφ = Leistungsfaktor
sinφ = Blindfaktor
$\underline{U}$ = komplexe Spannung
$\underline{I}^*$ = konjugiert komplexer Strom
U = Spannung in V (Betrag von $\underline{U}$)
I = Strom in A (Betrag von $\underline{I}$)
$\underline{Z}$ = komplexer Widerstand in Ω
$\underline{Z}^*$ = konjugiert komplexer Widerstand in Ω

Reihenschaltung komplexer Widerstände:

$\underline{Z}_g = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ $\underline{Z}_1 = R_1 + j \bullet X_1$ $\underline{Z}_2 = R_2 + j \bullet X_2$

$\underline{Z}_g = (R_1 + R_2) + j \bullet (X_1 + X_2)$

$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ $\underline{U}_1 = \underline{I} \bullet \underline{Z}_1$ $\underline{U}_2 = \underline{I} \bullet \underline{Z}_2$



$\underline{Z}_g$ = komplexer Gesamtscheinwiderstand in Ω
$\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ = komplexe Teilscheinwiderstände in Ω
R_1, R_2 = Teilwirkwiderstände in Ω
X_1, X_2 = Teilblindwiderstände in Ω
$\underline{U}$ = komplexe Gesamtspannung in V
$\underline{I}$ = komplexer Strom in A

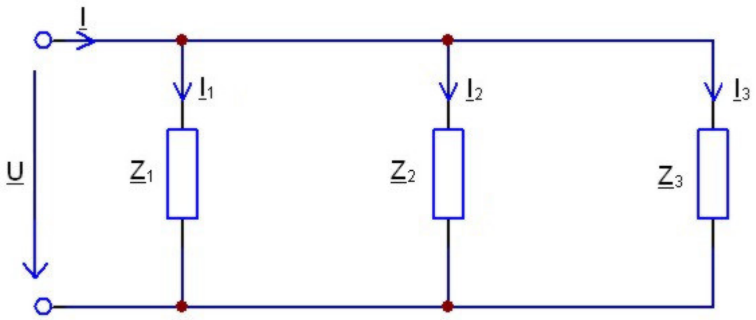
Parallelschaltung komplexer Widerstände:

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ $G = \frac{1}{R}$ $B = \frac{1}{X}$

$\underline{Y}_g = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$ $\underline{Y}_1 = G_1 + j \bullet B_1$

$\underline{Y}_2 = G_2 + j \bullet B_2$ $\underline{Y}_3 = G_3 + j \bullet B_3$

$\underline{Y}_g = (G_1 + G_2 + G_3) + j \bullet (B_1 + B_2 + B_3)$



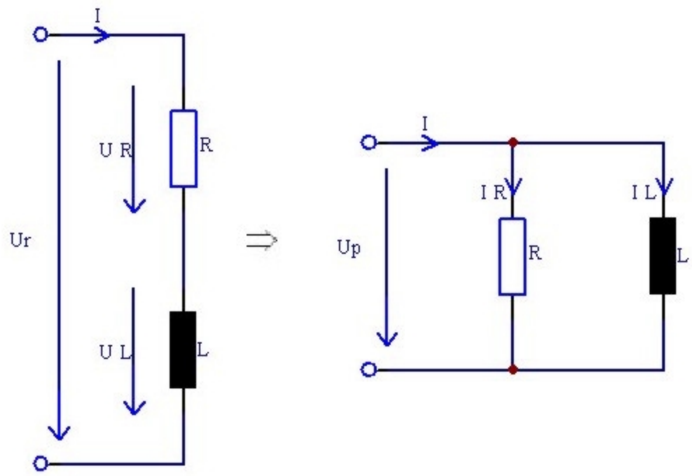
$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \underline{U} \bullet \underline{Y}_1$ $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \underline{U} \bullet \underline{Y}_2$ $\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3} = \underline{U} \bullet \underline{Y}_3$

$\underline{Y}$ = komplexer Gesamtscheinleitwert in S
$\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, $\underline{Y}_3$ = komplexe Teilscheinleitwerte in S
G_1, G_2, G_3 = komplexe Teilwirkleitwerte in S
B_1, B_2, B_3 = komplexe Teilblindleitwerte in S
$\underline{U}$ = komplexe Gesamtspannung in V
$\underline{I}$ = komplexer Strom in A

Umwandlung komplexe Reihenschaltung in komplexe Parallelschaltung:

Für die Umwandlung gilt:

$Z_r = Z_p$ und $\varphi_r = \varphi_p$ und $f_r = f_p$



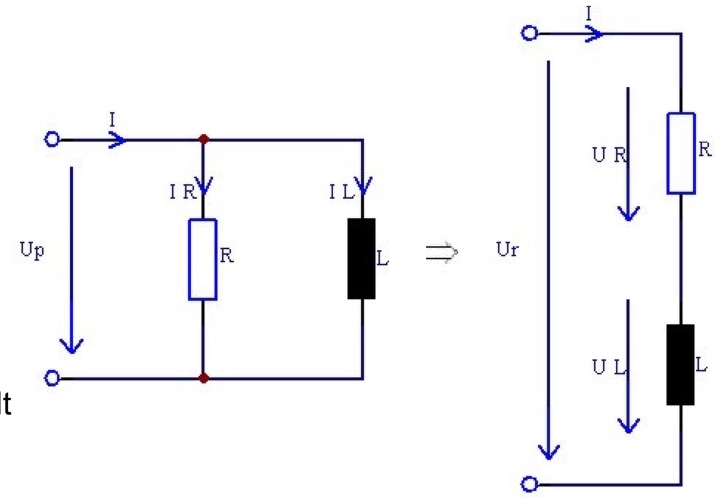
Verfahren der Umwandlung:

- $\underline{Z}_g$ der Reihenschaltung berechnen und in Versorform umwandeln
- $\underline{Y}_g$ von $\underline{Z}_g$ berechnen ($\underline{Y}_g = \frac{1}{\underline{Z}_g}$) und in Normalform umwandeln. Man erhält die Teil-Leitwerte (G und B).
- Aus den Teil-Leitwerten die Werte der Bauteile berechnen.

Umwandlung komplexe Parallelschaltung in komplexe Reihenschaltung:

Für die Umwandlung gilt:

$\boxed{\underline{Z}_p = \underline{Z}_r}$ und $\boxed{\varphi_p = \varphi_r}$ und $\boxed{f_p = f_r}$



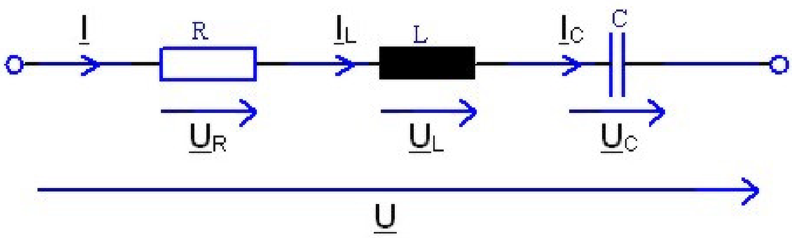
Verfahren der Umwandlung:

- $\underline{Y}_g$ der Parallelschaltung berechnen und in Versorform umwandeln
- $\underline{Z}_g$ von $\underline{Y}_g$ berechnen ($\underline{Z}_g = \frac{1}{\underline{Y}_g}$) und in Normalform umwandeln. Man erhält die Teil-Widerstände (R und X).
- Aus den Teil-Widerständen die Werte der Bauteile berechnen.

Resonanz:

Von Resonanz wird gesprochen, wenn der imaginäre Anteil des Scheinwiderstandes $\underline{Z}$ (Blindwiderstand j•X bzw. der Blindleitwert j•B) eines Netzwerkes 0 ist. ⇒ **φ = 0° !!**
Die Frequenz, bei der dieser Zustand zutrifft, nennt man Resonanzfrequenz f_r oder f_0 bzw. Resonanzkreisfrequenz ω_r oder ω_0 . **Bei Resonanz ist der Scheinwiderstand $\underline{Z}$ bzw. der Scheinleitwert $\underline{Y}$ des Netzwerkes rein reell !!**

Reihenresonanz:



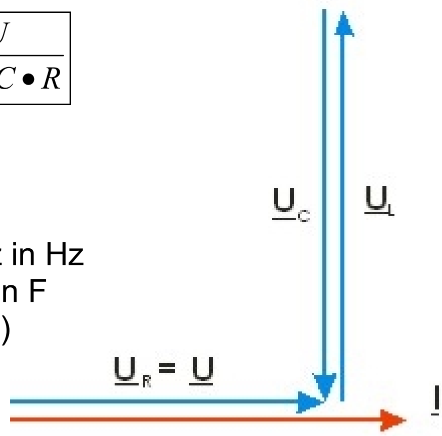
$$\boxed{f_r = \frac{1}{2 \bullet \pi \bullet \sqrt{L \bullet C}}} \quad \boxed{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L \bullet C}}}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{(2 \bullet \pi \bullet f_r)^2 \bullet C}} \quad \boxed{L = \frac{1}{\omega_r^2 \bullet C}} \quad \boxed{C = \frac{1}{(2 \bullet \pi \bullet f_r)^2 \bullet L}} \quad \boxed{C = \frac{1}{\omega_r^2 \bullet L}}$$

Bei Resonanz heben sich $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_C$ gegenseitig auf, da sie im Betrag gleich groß und um 180° phasenverschoben sind. **Allerdings kann die Spannung an den Bauteilen höher als die Gesamtspannung $\underline{U}$ sein (Spannungsüberhöhung)!!**

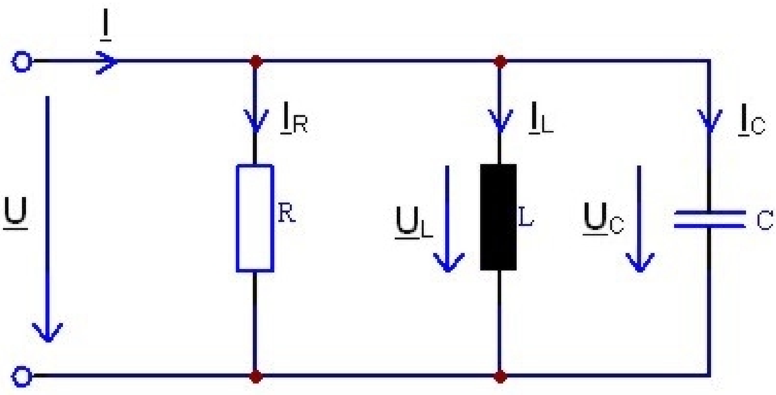
$$\boxed{\frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_r \bullet L}{R} = \frac{1}{\omega_r \bullet C \bullet R}} \quad \boxed{U_L = U_C = \frac{\omega_r \bullet L \bullet U}{R} = \frac{U}{\omega_r \bullet C \bullet R}}$$

$$\boxed{L = \frac{U_L \bullet R}{U \bullet \omega_r} = \frac{U_C \bullet R}{U \bullet \omega_r}} \quad \boxed{C = \frac{U}{U_L \bullet \omega_r \bullet R} = \frac{U}{U_C \bullet \omega_r \bullet R}}$$



f_r = Resonanzfrequenz in Hz ; ω_r = Resonanzkreisfrequenz in Hz
R = Widerstand in Ω ; L = Induktivität in H ; C = Kapazität in F
U = U_R = Spannung am Widerstand in V (Betrag von $\underline{U} = \underline{U}_R$)
U_L = Spannung an der Spule in V (Betrag von $\underline{U}_L$)
U_C = Spannung am Kondensator in V (Betrag von $\underline{U}_C$)
$\frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}$ **= Spannungsüberhöhung (Faktor !!)**

Parallelresonanz:

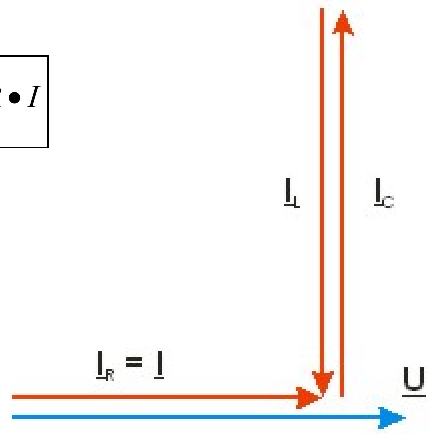


$$f_r = \frac{1}{2 \bullet \pi \bullet \sqrt{L \bullet C}} \qquad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L \bullet C}}$$

$$L = \frac{1}{(2 \bullet \pi \bullet f_r)^2 \bullet C} \qquad L = \frac{1}{\omega_r^2 \bullet C}$$

$$C = \frac{1}{(2 \bullet \pi \bullet f_r)^2 \bullet L} \qquad C = \frac{1}{\omega_r^2 \bullet L}$$

Bei Resonanz heben sich $\underline{I}_L$ und $\underline{I}_C$ gegenseitig auf, da sie im Betrag gleich groß und um 180° phasenverschoben sind. **Allerdings kann der Strom durch die Bauteile höher als der Gesamtstrom $\underline{I}$ sein (Stromüberhöhung)!!**



$$\frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{R}{\omega_r \bullet L} = \omega_r \bullet C \bullet R \qquad I_L = I_C = \frac{R \bullet I}{\omega_r \bullet L} = \omega_r \bullet C \bullet R \bullet I$$

$$L = \frac{I \bullet R}{I_L \bullet \omega_r} = \frac{I \bullet R}{I_C \bullet \omega_r} \qquad C = \frac{I_L}{I \bullet \omega_r \bullet R} = \frac{I_C}{I \bullet \omega_r \bullet R}$$

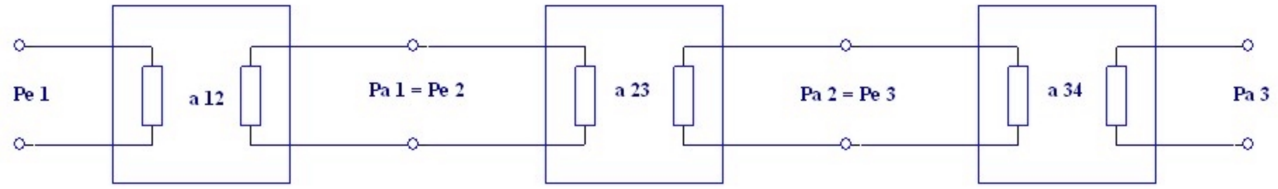
f_r = Resonanzfrequenz in Hz
ω_r = Resonanzkreisfrequenz in Hz
R = Widerstand in Ω
L = Induktivität in H
C = Kapazität in F
$I = I_R$ = Strom durch Widerstand in V (Betrag von $\underline{I}_R$)
I_L = Strom durch die Spule in V (Betrag von $\underline{I}_L$)
I_C = Strom durch den Kondensator in V (Betrag von $\underline{I}_C$)
$\frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}$ **= Stromüberhöhung (Faktor !!)**

Dämpfung:

$$D = \frac{P_e}{P_a} \qquad P_a = \frac{P_e}{D} \qquad P_e = D \bullet P_a$$

D = Dämpfung (Ohne Einheit !!)
P_e = Eingangsleistung in W
P_a = Ausgangsleisung in W

Dämpfungsmaß:



$$a = 10 \bullet \lg \frac{P_e}{P_a} \qquad P_e = P_a \bullet 10^{\frac{a}{10}} \qquad P_a = \frac{P_e}{10^{\frac{a}{10}}} = P_e \bullet 10^{-\frac{a}{10}}$$

Bei Anpassung ($R_e = R_a$) gilt:

$$a = 20 \bullet \lg \frac{U_e}{U_a} \qquad U_e = U_a \bullet 10^{\frac{a}{20}} \qquad U_a = \frac{U_e}{10^{\frac{a}{20}}} = U_e \bullet 10^{-\frac{a}{20}}$$

$$a = 20 \bullet \lg \frac{I_e}{I_a} \qquad I_e = I_a \bullet 10^{\frac{a}{20}} \qquad I_a = \frac{I_e}{10^{\frac{a}{20}}} = I_e \bullet 10^{-\frac{a}{20}}$$

a = Dämpfungsmaß in dB
P_e = Eingangsleistung in W
P_a = Ausgangsleistung in W
R_e = Eingangswiderstand in Ω
R_a = Ausgangswiderstand in Ω
U_e = Eingangsspannung in V
U_a = Ausgangsspannung in V
I_e = Eingangsstrom in A
I_a = Ausgangsstrom in A

Wenn $P_a = 0{,}707 \bullet P_e$ entspricht das einer Dämpfung von -3 dB

Das gesamte Dämpfungsmaß ist die Summe der Einzeldämpfungsmaße:

$$a_g = a_{12} + a_{23} + a_{34}$$

Komplexe Übertragungsfunktion allgemein:

$$\boxed{\underline{F}(j \bullet \omega)=\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}} \qquad \boxed{\underline{U}_e=\frac{\underline{U}_a}{\underline{F}(j \bullet \omega)}} \qquad \boxed{\underline{U}_a=\underline{F}(j \bullet \omega) \bullet \underline{U}_e}$$

$\underline{F}(j \bullet \omega)$ = komplexe Übertragungsfunktion (Ohne Einheit !!)
$\underline{U}_a$ = komplexe Ausgangsspannung in V
$\underline{U}_e$ = komplexe Eingangsspannung in V

Amplituden-Frequenzgang allgemein:

$$\boxed{\left|\underline{F}(j \bullet \omega)\right|=\frac{\left|\underline{U}_a\right|}{\left|\underline{U}_e\right|}=\frac{U_a}{U_e}} \qquad \boxed{\underline{U}_e=\frac{\underline{U}_a}{\underline{F}(j \bullet \omega)}} \qquad \boxed{\underline{U}_a=\underline{F}(j \bullet \omega) \bullet \underline{U}_e}$$

$|\underline{F}(j \bullet \omega)|$ = Betrag der komplexe Übertragungsfunktion (Ohne Einheit !!)
$|\underline{U}_a| = U_a$ Betrag der komplexen Ausgangsspannung = Effektivwert der Ausgangsspg. in V
$|\underline{U}_e| = U_e$ Betrag der komplexen Eingangsspannung = Effektivwert der Eingangsspg. in V

Phasen-Frequenzgang allgemein:

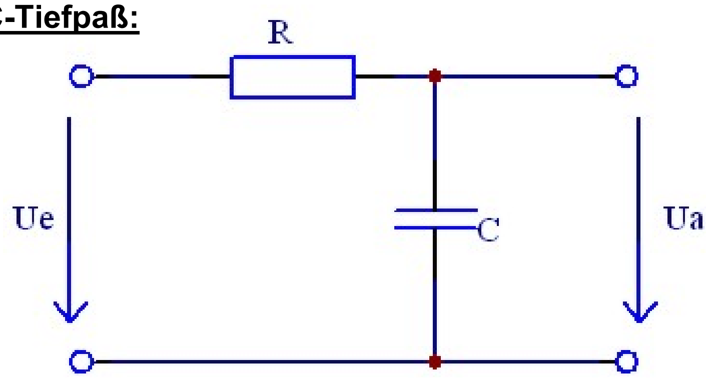
$$\boxed{\varphi(j \bullet \omega)=\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{F(j \bullet \omega)\}}{\operatorname{Re}\{F(j \bullet \omega)\}}\right)}$$

$\varphi(j \bullet \omega)$ = Phasenwinkel der komplexen Übertragungsfunktion
$\operatorname{Im}\{F(j \bullet \omega)\}$ = Imaginäranteil der komplexen Übertragungsfunktion
$\operatorname{Re}\{F(j \bullet \omega)\}$ = Realanteil der komplexen Übertragungsfunktion

Komplexe Übertragungsfunktion für RC-Tiefpaß:

$$\underline{F}(j \bullet \omega) = \frac{\frac{1}{j \bullet \omega \bullet C}}{R + \frac{1}{j \bullet \omega \bullet C}} = \frac{1}{1 + j \bullet \omega \bullet R \bullet C}$$

$$\underline{F}(j \bullet \omega) = \frac{1}{1 + (\omega \bullet R \bullet C)^2} - j \bullet \frac{\omega \bullet R \bullet C}{1 + (\omega \bullet R \bullet C)^2}$$



Amplituden-Frequenzgang:

Der Amplituden-Frequenzgang ist der Betrag der Übertragungsfunktion.

$$|\underline{F}(j \bullet \omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \bullet R \bullet C)^2}}$$

$$|\underline{F}(j \bullet \omega)|_{dB} = 20 \bullet \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \bullet R \bullet C)^2}}\right)$$

für $\omega \to 0 \Rightarrow |F(j \bullet \omega)| \to 1 \Rightarrow |\underline{U}_a| = |\underline{U}_e|$
für $\omega \to \infty \Rightarrow |F(j \bullet \omega)| \to 0 \Rightarrow |\underline{U}_a| \to 0$

Phasen-Frequenzgang:

Der Phasen-Frequenzgang ist die Phasendifferenz zwischen Ausgangsspannung und Eingangsspannung.

$$\varphi(j \bullet \omega) = -\arctan(\omega \bullet R \bullet C) = -\tan^{-1}(\omega \bullet R \bullet C)$$

für $\omega = 0 \Rightarrow \varphi(j \bullet \omega) = 0 \Rightarrow \underline{U}_a$ hat gleiche Phasenlage wie $\underline{U}_e$
für $\omega \to \infty \Rightarrow \varphi(j \bullet \omega) = -90° \Rightarrow \underline{U}_a$ eilt $\underline{U}_e$ um 90° nach

Grenzfrequenz:

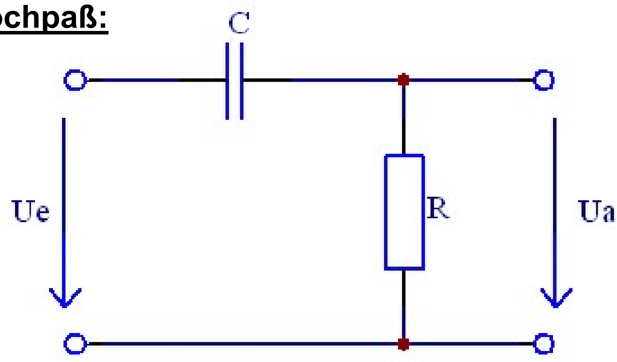
Bei Grenzfrequenz f_g bzw. ω_g ist der Wert des Amplituden-Frequenzganges (also der Betrag der Übertragungsfunktion) gleich $0{,}707 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Das entspricht –3dB.

$$\omega_g = \frac{1}{R \bullet C} \quad \Rightarrow \quad f_g = \frac{1}{2 \bullet \pi \bullet R \bullet C} \qquad R = \frac{1}{2 \bullet \pi \bullet f_g \bullet C} \qquad C = \frac{1}{2 \bullet \pi \bullet R \bullet f_g}$$

Phasenwinkel bei Grenzfrequenz:

$\varphi(j \bullet \omega_g) = -45°$ $\Rightarrow$ $\underline{U}_a$ eilt $\underline{U}_e$ um 45° nach

Komplexe Übertragungsfunktion für RC-Hochpaß:



$$\underline{F}(j\bullet\omega)=\frac{R}{R+\frac{1}{j\bullet\omega\bullet C}}=\frac{j\bullet\omega\bullet R\bullet C}{1+j\bullet\omega\bullet R\bullet C}$$

$$\underline{F}(j\bullet\omega)=\frac{(\omega\bullet R\bullet C)^2}{1+(\omega\bullet R\bullet C)^2}+j\bullet\frac{\omega\bullet R\bullet C}{1+(\omega\bullet R\bullet C)^2}$$

Amplituden-Frequenzgang:

Der Amplituden-Frequenzgang ist der Betrag der Übertragungsfunktion.

$$\left|\underline{F}(j\bullet\omega)\right|=\frac{\omega\bullet R\bullet C}{\sqrt{1+(\omega\bullet R\bullet C)^2}}$$

$$\left|\underline{F}(j\bullet\omega)\right|_{dB}=20\bullet\lg\left(\frac{\omega\bullet R\bullet C}{\sqrt{1+(\omega\bullet R\bullet C)^2}}\right)$$

für $\omega \to 0 \Rightarrow |F(j\bullet\omega)| \to 0 \Rightarrow |\underline{U}_a| \to 0$
für $\omega \to \infty \Rightarrow |F(j\bullet\omega)| \to 1 \Rightarrow |\underline{U}_a| = |\underline{U}_e|$

Phasen-Frequenzgang:

Der Phasen-Frequenzgang ist die Phasendifferenz zwischen Ausgangsspannung und Eingangsspannung.

$$\varphi(j\bullet\omega)=\arctan\left(\frac{1}{\omega\bullet R\bullet C}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega\bullet R\bullet C}\right)$$

für $\omega = 0 \Rightarrow \varphi(j\bullet\omega) = +90° \Rightarrow \underline{U}_a$ eilt $\underline{U}_e$ um 90° vor
für $\omega \to \infty \Rightarrow \varphi(j\bullet\omega) = 0° \Rightarrow \underline{U}_a$ hat gleiche Phasenlage wie $\underline{U}_e$

Grenzfrequenz:

Bei Grenzfrequenz f_g bzw. ω_g ist der Wert des Amplituden-Frequenzganges (also der Betrag der Übertragungsfunktion) gleich $0{,}707=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Das entspricht –3dB.

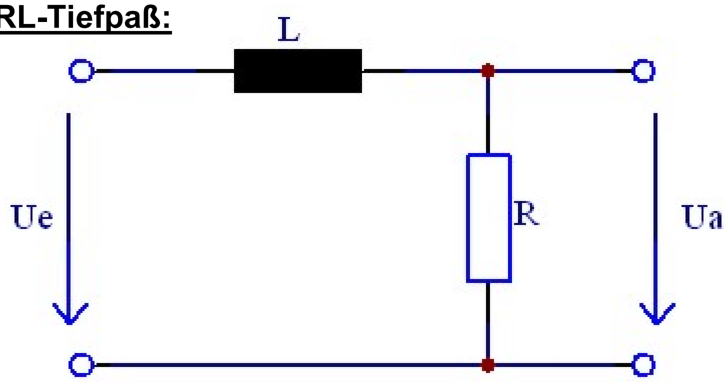
$$\omega_g=\frac{1}{R\bullet C} \Rightarrow f_g=\frac{1}{2\bullet\pi\bullet R\bullet C}$$

$$R=\frac{1}{2\bullet\pi\bullet f_g\bullet C} \qquad C=\frac{1}{2\bullet\pi\bullet R\bullet f_g}$$

Phasenwinkel bei Grenzfrequenz:

$\varphi(j\bullet\omega_g)=+45°$ $\Rightarrow$ $\underline{U}_a$ eilt $\underline{U}_e$ um 45° vor

Komplexe Übertragungsfunktion für RL-Tiefpaß:



$$\underline{F}(j \bullet \omega) = \frac{R}{R + j \bullet \omega \bullet L} = \frac{1}{1 + j \bullet \omega \bullet \frac{L}{R}}$$

$$\underline{F}(j \bullet \omega) = \frac{1}{1 + \left(\omega \bullet \frac{L}{R}\right)^2} - j \bullet \frac{\omega \bullet \frac{L}{R}}{1 + \left(\omega \bullet \frac{L}{R}\right)^2}$$

$$\underline{F}(j \bullet \omega) = \frac{R^2}{R^2 + (\omega \bullet L)^2} - j \bullet \frac{\omega \bullet R \bullet L}{R^2 + (\omega \bullet L)^2}$$

Amplituden-Frequenzgang:

Der Amplituden-Frequenzgang ist der Betrag der Übertragungsfunktion.

$$\left|\underline{F}(j \bullet \omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega \bullet \frac{L}{R}\right)^2}} \qquad \left|\underline{F}(j \bullet \omega)\right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega \bullet L)^2}} \qquad \left|\underline{F}(j \bullet \omega)\right|_{dB} = 20 \bullet \lg\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega \bullet L)^2}}\right)$$

für $\omega \to 0 \Rightarrow |F(j\bullet\omega)| \to 1 \Rightarrow |\underline{U}_a| = |\underline{U}_e|$
für $\omega \to \infty \Rightarrow |F(j\bullet\omega)| \to 0 \Rightarrow |\underline{U}_a| \to 0$

Phasen-Frequenzgang:

Der Phasen-Frequenzgang ist die Phasendifferenz zwischen Ausgangsspannung und Eingangsspannung.

$$\varphi(j \bullet \omega) = -\arctan\left(\omega \bullet \frac{L}{R}\right) = -\tan^{-1}\left(\omega \bullet \frac{L}{R}\right)$$

für $\omega = 0 \Rightarrow \varphi(j\bullet\omega) = 0 \Rightarrow \underline{U}_a$ hat gleiche Phasenlage wie $\underline{U}_e$
für $\omega \to \infty \Rightarrow \varphi(j\bullet\omega) = -90° \Rightarrow \underline{U}_a$ eilt $\underline{U}_e$ um 90° nach

Grenzfrequenz:

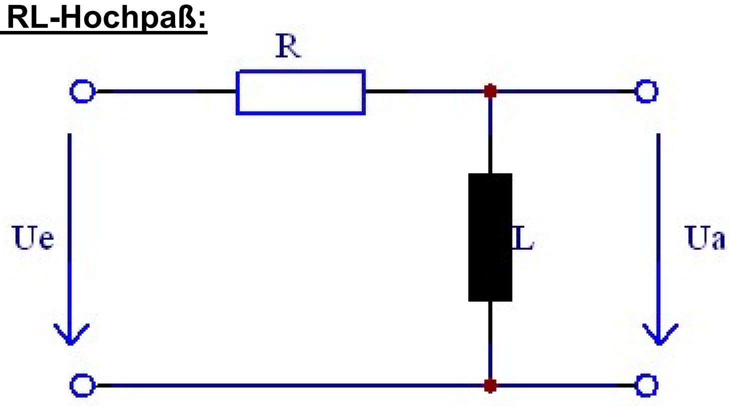
Bei Grenzfrequenz f_g bzw. ω_g ist der Wert des Amplituden-Frequenzganges (also der Betrag der Übertragungsfunktion) gleich $0{,}707 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Das entspricht –3dB.

$$\omega_g = \frac{R}{L} \Rightarrow f_g = \frac{R}{2 \bullet \pi \bullet L} \qquad R = f_g \bullet 2 \bullet \pi \bullet L \qquad L = \frac{R}{2 \bullet \pi \bullet f_g}$$

Phasenwinkel bei Grenzfrequenz:

$\varphi(j \bullet \omega_g) = -45°$ $\Rightarrow$ $\underline{U}_a$ eilt $\underline{U}_e$ um 45° nach

Komplexe Übertragungsfunktion für RL-Hochpaß:



$$\underline{F}(j\bullet\omega)=\frac{j\bullet\omega\bullet L}{R+j\bullet\omega\bullet L}=\frac{1}{1-j\bullet\frac{R}{\omega\bullet L}}$$

$$\underline{F}(j\bullet\omega)=\frac{1}{1+\left(\frac{R}{\omega\bullet L}\right)^2}+j\bullet\frac{\frac{R}{\omega\bullet L}}{1+\left(\frac{R}{\omega\bullet L}\right)^2}$$

$$\underline{F}(j\bullet\omega)=\frac{(\omega\bullet L)^2}{R^2+(\omega\bullet L)^2}+j\bullet\frac{\omega\bullet R\bullet L}{R^2+(\omega\bullet L)^2}$$

Amplituden-Frequenzgang:

Der Amplituden-Frequenzgang ist der Betrag der Übertragungsfunktion.

$$\left|\underline{F}(j\bullet\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{\omega\bullet L}\right)^2}}$$ $$\left|\underline{F}(j\bullet\omega)\right|=\frac{\omega\bullet L}{\sqrt{R^2+(\omega\bullet L)^2}}$$ $$\left|\underline{F}(j\bullet\omega)\right|_{dB}=20\bullet\lg\left(\frac{\omega\bullet L}{\sqrt{R^2+(\omega\bullet L)^2}}\right)$$

für $\omega \to 0 \Rightarrow |F(j\bullet\omega)| \to 0 \Rightarrow |\underline{U}_a| \to 0$
für $\omega \to \infty \Rightarrow |F(j\bullet\omega)| \to 1 \Rightarrow |\underline{U}_a| = |\underline{U}_e|$

Phasen-Frequenzgang:

Der Phasen-Frequenzgang ist die Phasendifferenz zwischen Ausgangsspannung und Eingangsspannung.

$$\varphi(j\bullet\omega)=\arctan\left(\frac{R}{\omega\bullet L}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{R}{\omega\bullet L}\right)$$

für $\omega = 0 \Rightarrow \varphi(j\bullet\omega) = +90° \Rightarrow \underline{U}_a$ eilt $\underline{U}_e$ um 90° vor
für $\omega \to \infty \Rightarrow \varphi(j\bullet\omega) = 0° \Rightarrow \underline{U}_a$ hat gleiche Phasenlage wie $\underline{U}_e$

Grenzfrequenz:

Bei Grenzfrequenz f_g bzw. ω_g ist der Wert des Amplituden-Frequenzganges (also der Betrag der Übertragungsfunktion) gleich $0{,}707=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Das entspricht –3dB.

$$\omega_g=\frac{R}{L} \Rightarrow f_g=\frac{R}{2\bullet\pi\bullet L}$$ $$R=f_g\bullet 2\bullet\pi\bullet L$$ $$L=\frac{R}{2\bullet\pi\bullet f_g}$$

Phasenwinkel bei Grenzfrequenz:

$\varphi(j\bullet\omega_g)=+45° \Rightarrow \underline{U}_a$ eilt $\underline{U}_e$ um 45° vor

Frequenznormierte Darstellung der Übertragungsfunktionen (Bode-Diagramm):

Durch die Frequenznormierung erreicht man, das die Darstellung aller Tief- oder Hochpässe gleich ist und in Abhängigkeit der Grenzfrequenz erfolgt.

Normierung:

$$\boxed{\Omega = \frac{f}{f_g}} \quad \boxed{f_g = \frac{f}{\Omega}} \quad \boxed{f = \Omega \bullet f_g} \quad \boxed{\Omega = \frac{\omega}{\omega_g}} \quad \boxed{\omega_g = \frac{\omega}{\Omega}} \quad \boxed{\omega = \Omega \bullet \omega_g}$$

Ω = normierte Frequenz (Ohne Einheit)
f = Frequenz in Hz
f_g = Grenzfrequenz in Hz
ω = Kreisfrequenz in $\frac{1}{s}$
ω_g = Grenzkreisfrequenz in $\frac{1}{s}$

Tiefpass:

Normierter Amplituden-Frequenzgang:

$$\boxed{\left|\underline{F}(j \bullet \Omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}} \quad \boxed{\left|\underline{F}(j \bullet \Omega)\right|_{dB} = 20 \bullet \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}\right)}$$

$$\boxed{\frac{f}{f_g} = \frac{\omega}{\omega_g} = \Omega = \sqrt{\left|F(j \bullet \Omega)\right|^{-2} - 1}} \quad \boxed{\frac{f}{f_g} = \frac{\omega}{\omega_g} = \Omega = \sqrt{10^{-\left(\frac{\left|F(j\bullet\Omega)\right|_{dB}}{10}\right)} - 1}}$$

Normierter Phasen-Frequenzgang:

$$\boxed{\varphi(j \bullet \Omega) = -\arctan(\Omega) = -\tan^{-1}(\Omega)}$$

Hochpass:

Normierter Amplituden-Frequenzgang:

$$\boxed{\left|\underline{F}(j \bullet \Omega)\right| = \frac{\Omega}{\sqrt{1+\Omega^2}}} \quad \boxed{\left|\underline{F}(j \bullet \Omega)\right|_{dB} = 20 \bullet \lg\left(\frac{\Omega}{\sqrt{1+\Omega^2}}\right)}$$

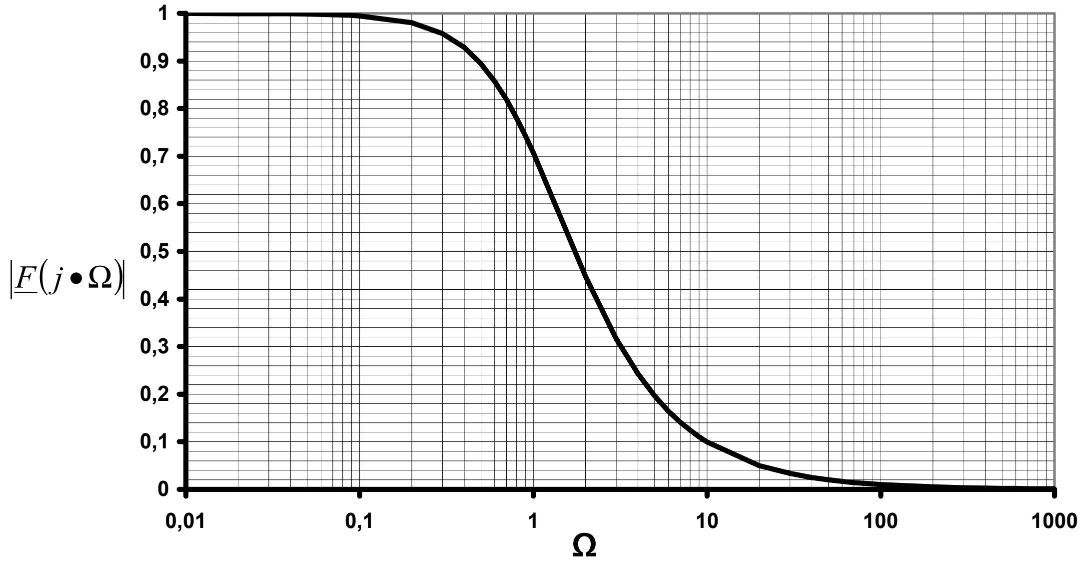
$$\boxed{\frac{f}{f_g} = \frac{\omega}{\omega_g} = \Omega = \sqrt{\frac{\left|F(j \bullet \Omega)\right|^2}{1-\left|F(j \bullet \Omega)\right|^2}}} \quad \boxed{\frac{f}{f_g} = \frac{\omega}{\omega_g} = \Omega = \sqrt{\frac{10^{\frac{\left|F(j\bullet\Omega)\right|_{dB}}{10}}}{1\text{-}\left(10^{\frac{\left|F(j\bullet\Omega)\right|_{dB}}{10}}\right)}}}$$

Normierter Phasen-Frequenzgang:

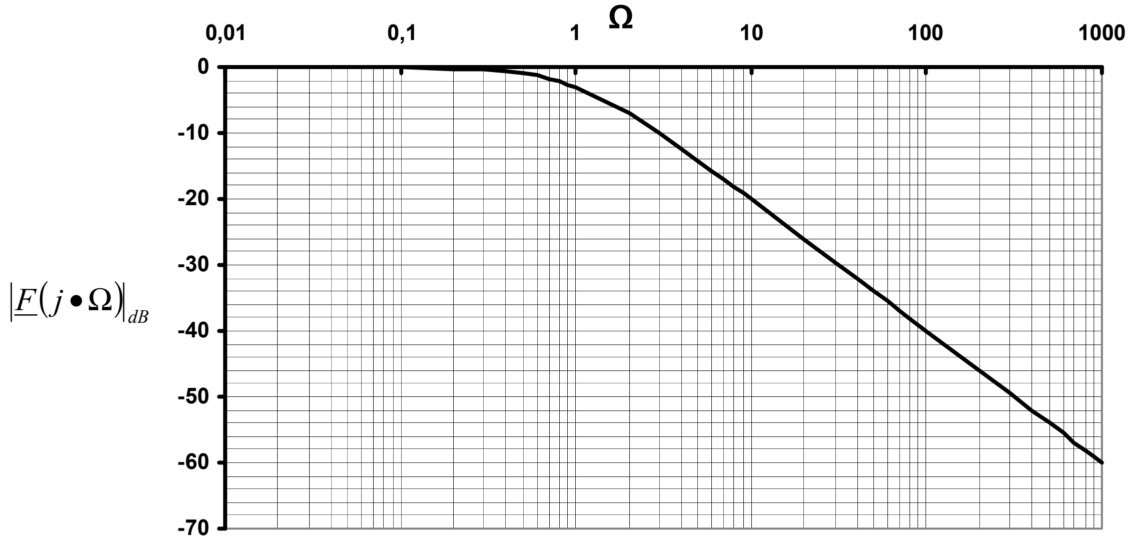
$$\boxed{\varphi(j \bullet \Omega) = \arctan\left(\frac{1}{\Omega}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\Omega}\right)}$$

Bode-Diagramme für Tiefpass:

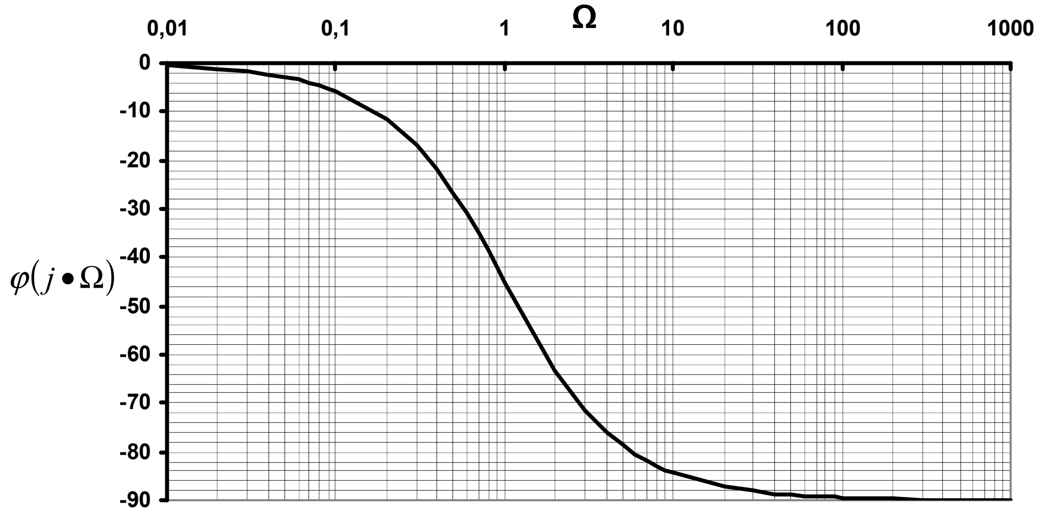
Normierter Amplituden-Frequenzgang:



Normierter Amplituden-Frequenzgang in dB:

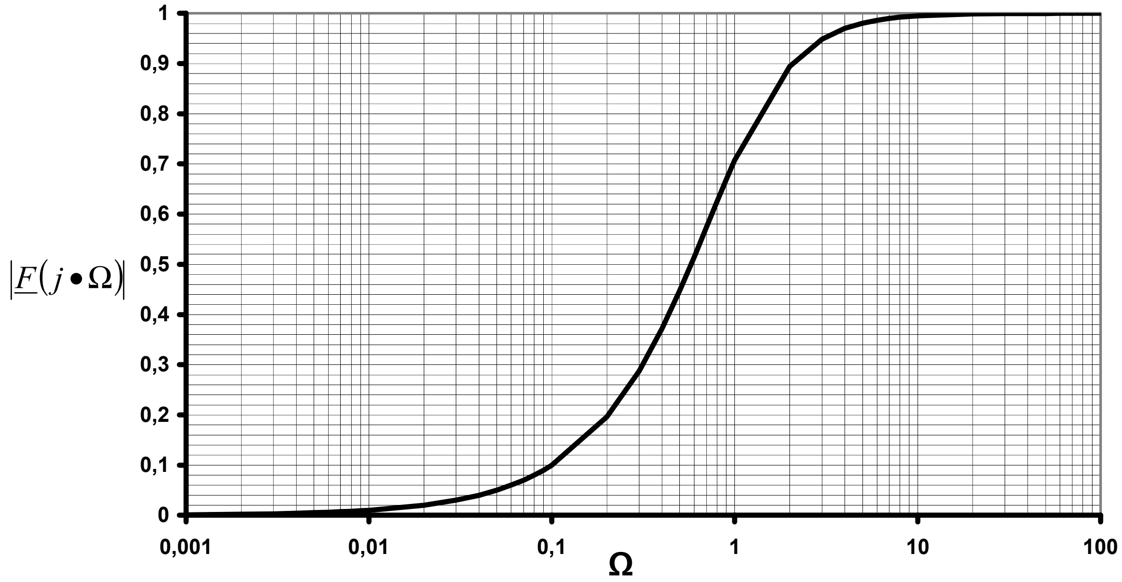


Normierter Phasen-Frequenzgang:

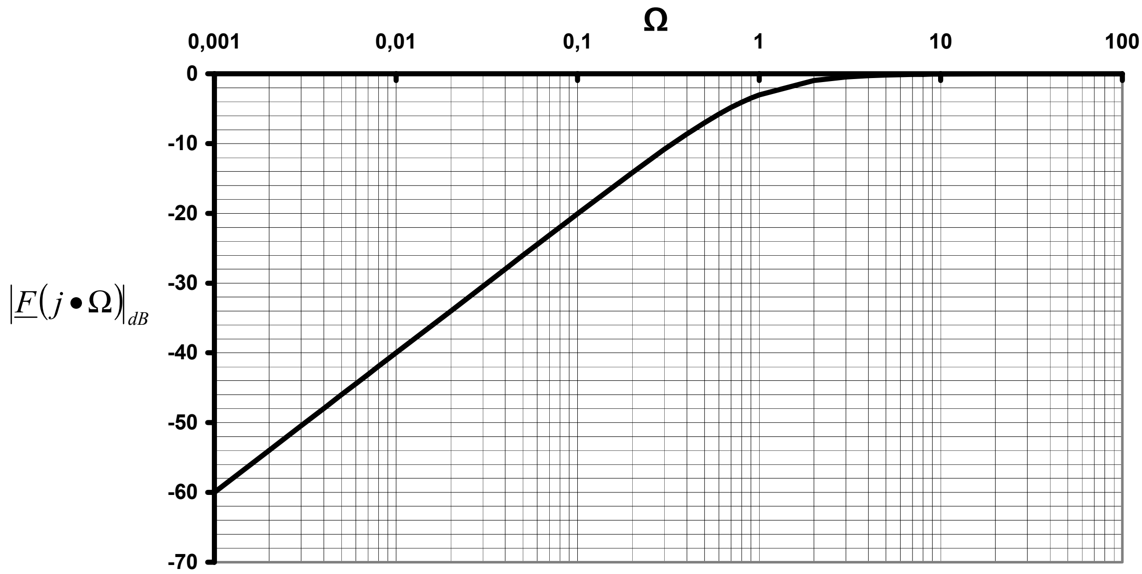


Bode-Diagramme für Hochpass:

Normierter Amplituden-Frequenzgang:



Normierter Amplituden-Frequenzgang in dB:



Normierter Phasen-Frequenzgang: